日本シリーズからバレーボール そして量子ウォークへの連想

瀬川 悦生
(横浜国立大学)

先日は横浜が日本シリーズで湧いた。我が家でも子どもの野球チームのメンバーと、保護者たちと焼肉屋さんでその優勝の瞬間をテレビで観戦し、大いに盛り上がった。テレビからでも、選手たちの熱く強い気持ちが伝わり、元気をたくさんもらえる試合だった。

今回は、思い返すと最初の2戦、ホームグランドで2連敗し、最初の予想通り、力の差があり、優勝はやはり難しいように思えた。しかしながら、アウェーグランドでなんと3連勝し、優勝までリーチ、そしていざ横浜に戻って、一日雨天中止をはさみ、その勢いが止まってしまうかなと思ったが、そのまま優勝を決めた。結局合計6ゲームが行われたことになる。今にして思えば、クライマックスシリーズから何度も修羅場を潜り抜け、チームとして、強化されていったようにも思える。

ところで、力の拮抗しているチームが n 勝先取りのシリーズの場合、優勝が決定するまでに、典型的には何試合行われることになるだろうか？ドラマチックに $(n-1)$ 勝 $(n-1)$ 敗で次の $(2n-1)$ ゲーム目で優勝者の決まるシーンが思い浮かぶのではないだろうか。しかしながら実は、全てのゲームは前の試合結果によらずに独立に勝敗が決するとすれば、k ゲームで優勝者が決まる確率を P_k とすると $(n\le k\le 2n-1)$、$P_n<P_{n+1}<\cdots<P_{2n-2}=P_{2n-1}$ となり、$2n-2$ ゲームと $2n-1$ ゲームで終わる確率は意外にも共に等しくなる。今回の日本シリーズで言えば、$n=4$ で $4\le k\le 7$ に対して、$k=6$ で、やはり典型的なゲーム数となっている。実際にこれまでの日本シリーズの結果を調べてみると6ゲームと7ゲームで優勝者が決定する回数は同じくらいのようである。

ここまでの話は、もしかするとどこかで聞いた話かもしれない。そこで自然なもう一捻りを加えると、意外なところで意外な出会いがある。それは、実際には、前回、もしくは前々回の勝敗を引きずって、今回の勝率が変動しそうな気がするところからはじまる。私なら、後1勝したら優勝と思ったら、つい力んでしまって、負けてしまうかもしれない。私の大好きな力士もいつもここという勝負所で、負けてしまう。それがまた、つい応援したくなるのだが。。前回の結果が、次の結果に影響を及ぼすことを見ることのできる、露骨なスポーツが今のバレーボールだと思う*。バレーボールにはサーブとレシーブという2つ状態が2チーム間で移りあう。前回自分のチームが得点をすると、サーブになり、相手はレシーブにまわる。一方で前回自分のチームが失点すると、自分がレシーブにまわり、相手がサーブになる。サーブはネットから遠いコートの外から打つので、ネットの真上の至近距離からたたきつけられるアタックと比べて、比較的拾われやすく、レシーブのほうが、サーブよりも明らかに有利である (と思う)。

*昔は、サーブ権を持つチームのみが得点できるルールで、とっても試合時間が長かったが、今は、サーブもレシーブも得点できる。

いずれにしてもバレーボールで得点が動くのは、自分のチームが得点、失点、それがサーブかレシーブかで、4 通りが考えられる。そこで、自分のチームの得点を “$\rightarrow$” 失点を “$\leftarrow$” で表すと、それぞれサーブからの得点は、「“$\rightarrow$” から “$\rightarrow$”」、サーブからの失点は、「“$\rightarrow$” から “$\leftarrow$”」、レシーブで得点は、「“$\leftarrow$” から “$\rightarrow$”」、レシーブで失点は 「“$\leftarrow$” から ‘$\leftarrow$”」への遷移と解釈できる。そこで、自分のチームの相手チームに対するサーブのときの得点率を p_s、レシーブのときの得点率を p_r とし、自分のチームがサーブから ℓ 対 m となる確率を $P(\ell, m; \rightarrow)$ とし、一方でレシーブから ℓ 対 m となる確率を $P(\ell, m; \leftarrow)$ とする (おそらく、$p_s < p_r$)。 すると次のような漸化式が得られる。

$$
\begin{aligned}
P(\ell, m; \rightarrow) &= p_s P(\ell-1, m; \rightarrow) + p_r P(\ell-1, ; \leftarrow) \\
P(\ell, m; \leftarrow) &= q_s P(\ell, m-1; \rightarrow) + q_r P(\ell, m-1; \leftarrow)
\end{aligned}
$$

ここで, $q_s = 1 - p_s$, $q_r = 1 - p_r$(つまり、サーブ、レシーブで失点する確率) である。ℓ、m の代わりに、$n = \ell + m$, $x = \ell - m$ を変数として、この時間発展を見直す。これはそれぞれステップ数と、得点差に相当する。ここで簡単のため、$p := p_s = q_r$ とし、力が拮抗していると仮定する。すると, これと等価な式は、$\vec{r}_n(x) := [P(\frac{n+x}{2}, \frac{n-x}{2}; \rightarrow), P(\frac{n+x}{2}, \frac{n-x}{2}; \leftarrow)]^\top$ とすると,

$$
\vec{r}_{n+1}(x) = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{r}_n(x-1) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1-p & p \end{bmatrix} \vec{r}_n(x+1).
$$

つまり、こんなところで、量子ウォークを類推する、相関付きランダムウォーク [1] と出会えた! この相関付きランダムウォークの局所的な時間発展を決める確率推移行列 P は次のようにユニタリ行列の Hadamard 積で与えられる。

$$
C \circ \bar{C} = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{bmatrix} = P
$$

相関付きランダムウォークの P をユニタリ行列 C に置き換えて時間発展をさせたものがまさに量子ウォークである。バレーボールは 25 点先取りなので、ℓ, m どちらかが 25 にヒットした時点で試合終了となり、さらに特例として $(\ell, m) = (24, 24)$ にヒットした場合には、デュース† となるので、引き分けから 2 連続して得点しないと、勝負が決まらないので、もう少し複雑である。しかしながら、どのくらいのステップで試合が決まるのかなど色々なことがこの相関付きランダムウォークを考えれば、出てくることになる。また、量子ウォークがバレーボールをするとどうなるのだろう？今回は、この繋がりに気が付いたことで満足して、その先はやっていない。(すみません。)

最近相関付きランダムウォークと量子ウォークの 2 つを連続的に繋ぐモデルを提案しその極限定理が得られたので、近日報告する。

References

[1] 今野紀雄, 量子ウォークの数理, 産業図書 (2008)

† 最初はどちらがサーブかレシーブかはコイントスなどで決まる。p が 0 の極端な場合、ジグザクに得点は変動して、最初にレシーブした方が、25 になるような不公平性を排除するために、このようなルールがあるとのこと。ちなみに、44-42 でようやく試合が決まったという国際大会の記録もあるようだ。